一、贝塔函数

定义：$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ (x>0,y>0)$

性质：（标了△的表示重点）

(1)对称性$:B(x,y)=B(y,x)$

(2)初值$:B(x,1)=\frac{1}{x},B(1,y)=\frac{1}{y}$

(3)初值$:B(x,x)=2^{-2x+1}B\left(x,\frac{1}{2}\right)$

(4)递推公式$:B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$

(5)与$\Gamma(x)$联系$:B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$(6)B(x+m,y+n)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(x+i)\cdot\prod_{j=1}^{n}(y+j)}{\prod_{k=1}^{m+n}(x+y+k)}B(x,y)$$

$$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

(7)余元公式$:B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\ (x\notin\mathrm{N})$

变形：

$(1)\quad u=\frac{t}{1-t}\Rightarrow B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

$(2)\quad (1)\ \&\ u=\frac{1}{t}\Rightarrow B(x,y)=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{u-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

$(3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^q xdx=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$

二、伽马积分

定义：$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\ (x>0)$

性质：

(1)初值$:\Gamma(1)=1$

(2)初值$:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(3)递推公式$:\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

(4)光滑

(5)倍元公式$:\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

(6)余元公式$:\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$