欧拉积分

由于贝塔函数和伽马函数的理论是相互建立的，这里无法将其机械分开，约定 1 开头表示贝塔函数的性质，2 开头表示伽马函数性质。前面是体系建立的过程，最后会有性质的总结。

一、定义及性质

定义 1：称 $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ (x>0,y>0)$ 为贝塔函数，又称第一类欧拉积分

性质 1.1：（对称性）$B(x,y)=B(y,x)$

$$\begin{aligned}\text{证明}:B(x,y)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\overset{u=1-t}{=}-\int_1^0(1-u)^{x-1}u^{y-1}du\\&=\int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du=B(y,x)\end{aligned}$$

性质 1.2：$B(x,1)=\frac{1}{x}$, $B(1,y)=\frac{1}{y}$

性质 1.3：$B(x,x)=2^{-2x+1}B\left(x,\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\text{证明}:B(x,x)&=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{x-1}dt=2\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{x-1}dt\\&\overset{u=(2t-1)^2}{=}2\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{u}{4}\right)^{x-1}\frac{1}{4\sqrt{u}}du=2^{-2x+1}\int_0^1\frac{(1-u)^{x-1}}{\sqrt{u}}du\\&=2^{-2x+1}B\left(\frac{1}{2},x\right)=2^{-2x+1}B\left(x,\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

定义 2：称 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\ (x>0)$ 为伽马函数，又称第二类欧拉积分

性质 2.1：$\Gamma(1)=1$

$$\text{证明}:\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}t^{1-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$$

性质 2.2：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

$$\text{证明}:\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt\overset{u=\sqrt{t}}{=}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\cdot 2udu=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

性质 2.3：（递推公式）$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$\begin{aligned}\text{证明}:\Gamma(x+1)&=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=-\int_0^{+\infty}t^xde^{-t}=-t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t}dt^x\\&=0+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)\end{aligned}$$

推论：$\Gamma(n)=n!\,(n\in\mathrm{N}^*)$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ (n\in\mathrm{N})$$

证明是显然的

性质 2.4：（光滑性）伽马函数在(0,+∞)上有任意阶导数

证明在课本已给出

性质 1.2：$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$\text{证明}:\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}s^{x-1}e^{-s}ds\cdot\int_0^{+\infty}t^{y-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\ s^{x-1}t^{y-1}e^{-(s+t)}dsdt$$

$$\text{令}s=uv,t=u(1-v)\Rightarrow\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-u\neq 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{1}\ (uv)^{x-1}(u(1-v))^{y-1}e^{-(uv+u(1-v))}ududv\\&=\int_0^{+\infty}u^{x+y-1}e^{-u}du\cdot\int_0^{1}v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\\&=\Gamma(x+y)B(x,y)\end{aligned}$$

性质 1.3：（递推公式）$B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$

$$\text{证明}:B(x+1,y)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}=\frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}=\frac{x}{x+y}B(x,y)$$

推论：$B(x+m,y+n)=\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(x+i)\cdot\prod_{j=1}^{n}(y+j)}{\prod_{k=1}^{m+n}(x+y+k)}B(x,y)$

$$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

性质 2.5：（倍元公式）$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

证明：$B(x,x)=2^{-2x+1}B\left(x,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}=2^{-2x+1}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

$$\therefore\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$$

性质 2.6：（余元公式）$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\,(x\notin\mathrm{N})$[1]

证明：不会，可以自行查找参考文献[2]

【注：x<0 时的函数值由此计算】

性质 1.4：$B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\,(x\notin\mathrm{N})$

二、贝塔函数变形

变形 1：$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

证明:令$u=\frac{t}{1-t}$易证

变形 2：$B(x,y)=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}+t^{u-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

证明:在变形1.1基础上,

$$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

$$\overset{u=\frac{1}{t}}{=}\int_0^{1}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt+\int_0^{1}\frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du=\int_0^{1}\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

三、应用

套路 1：换元把分母化为$(1+x)^n$的形式再根据变形 1 解决

例1.$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$

$$=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\cdot B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

例2.$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$

$$\overset{u=x^3}{=}\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{u^{-\frac{2}{3}}}{1+u}du=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

套路 2：不要忘记贝塔函数的定义

$$例3.\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx$$

$$\overset{u=x^n}{=} \frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1}(1-u)^{\frac{n-1}{n}-1}du = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

套路 3：对于三角无理式，可以化为(sinx)ᵖ·(cosx)ᑫ，然后将正弦换掉再将平方换掉（或者直接令 u=(sinx)²）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x dx$$

$$\overset{t=\sin x}{=} \int_0^1 t^p\left(1-t^2\right)^{\frac{q-1}{2}}dt$$

$$\overset{u=t^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}}(1-u)^{\frac{q-1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$$

$$例4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}dx$$

$$\overset{t=\sin x}{=} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{4}}dt$$

$$\overset{u=\sqrt{t}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{4}}du$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

套路 4：

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-x^q}dx \ \ (p,q>0)$$

$$\overset{t=x^q}{=} \frac{1}{q}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}e^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

【注：q<0 时第二步需注意符号】

此外，欧拉积分还用于 Laplace 变换等，这里不再详细展开

总结：

一、贝塔函数

定义：$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ (x>0,y>0)$

性质：（标了△的表示重点）

$\Delta(1)$对称性$:B(x,y)=B(y,x)$

$\Delta(2)$初值$:B(x,1)=\frac{1}{x}, B(1,y)=\frac{1}{y}$

(3)初值$:B(x,x)=2^{-2x+1}B\left(x,\frac{1}{2}\right)$

$\Delta(4)$递推公式$:B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$

$\Delta(5)$与$\Gamma(x)$联系$:B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$(6)B(x+m,y+n)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(x+i)\cdot\prod_{j=1}^{n}(y+j)}{\prod_{k=1}^{m+n}(x+y+k)}B(x,y)$$

$$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

$\Delta(7)$余元公式$:B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\ (x\notin \mathrm{N})$

【建议只记和伽马函数联系，然后其他所有公式可由伽马函数的性质推出】

变形：

$(1)\quad u=\frac{t}{1-t}\Rightarrow B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

$(2)\quad (1)\,\&\,u=\frac{1}{t}\Rightarrow B(x,y)=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{u-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

套路：

1.利用贝塔函数的定义

2.换元把分母化为(1+x)^n 的形式再根据变形 1 解决

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^q xdx$ 型：2 次换元（或合二为一）——一次换掉三角，一次换掉平方

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx$$

$$\overset{t=\sin x}{=} \int_0^1 t^p \left(1-t^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dt$$

$$\overset{u=t^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}} (1-u)^{\frac{q-1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

二、伽马积分

定义：$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \ (x > 0)$

性质：（标了△的表示重点）

$\Delta(1)$初值：$\Gamma(1) = 1$

$\Delta(2)$初值：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\Delta(3)$递推公式：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$\Delta(4)$光滑

(5)倍元公式：$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

$\Delta(6)$余元公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

套路：

1.利用定义

2.Laplace 变换

【更多题目请查阅吉米多维奇】

参考文献

[1]邢家省.Gamma 函数的倍元公式的几种证法[J].河南科学,2010,28(08):902-906.

[2]楼红卫.伽马函数余元公式的证明[J].高等数学研究,2017,20(01):1-4.

[3]吉米多维奇.数学分析习题集题解